



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

MAROUF Selma

Sujet

Etude de certains problèmes mal-posés

Devant le jury :

NADIR Mostefa	Prof. Univ de M'sila	Président
DJAIDJA Noui	M.A.A. Univ de M'sila	Encadreur
KHIRANI Amina	M.C.B. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Dédicaces

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots
qu'il faut...*

*Toutes les mots ne sauraient exprimer la gratitude,
l'amour, le respect, la connaissance.....*

*Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, vous
êtes l'air que je reprise, la lumière qui éclaire
ma vie...*

À mes chers frères

À mes chers soeurs

Remerciements

Je remercie avant ALLAH le clément de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Mr. N.DJAIJA pour ma fournir le sujet de ce mémoire et pour m'avoir guidé.

Je remercie chaleureusement le professeur Mr. M.NADIR pour l'honneur qu'il m'a accordé, en acceptant de présider le jury de ce mémoire master.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à Mrs. A.KHIRANI qu'il ma fait l'honneur de participer au jury et examiner ce travail.

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Rappels et notations	3
1.1 Rappel sur les espaces	3
1.1.1 Propriétés des espaces de Hilbert	4
1.2 Opérateurs linéaires	5
1.2.1 opérateurs continus	5
1.2.2 Opérateurs adjoints	7
1.2.3 Opérateurs auto-adjoints	8
1.2.4 Opérateurs compacts	8
1.3 Opérateurs intégraux et équations intégrales	10
1.3.1 Opérateurs intégraux	10
1.3.2 Equations intégrales	10
1.3.3 Discrétisation des équations intégrales par quadrature	14
2 Problèmes mal-posés	15
2.1 Introduction	15
2.2 Problèmes directs et problèmes inverses	15
2.2.1 Problèmes bien-posés et mal-posés	16
2.2.2 Exemples de problèmes mal-posés	17

3	Méthodes de régularisation	25
3.1	Méthode de Tikhonov	25
3.2	Méthode de Lavrentiev	30
3.3	Méthode de Landweber	32
	Conclusion	34
	Bibliographie	35

Introduction

La notion d'un problème mathématique mal-posé a apparut dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard dans son ouvrage [6], après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Lavrent'ev, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal-posés. Ils ont pu donner une définition mathématique précise des solutions approchées. Aujourd'hui, ces problèmes sont un cadre de recherche très riche.

Le but d'étude des problèmes mal posés est de savoir la cause de la raison d'être du mal et aussi la résolution de ces problèmes. La régularisation de problèmes mal-posés consiste à permuter les problèmes mal-posés en des autre bien-posés par des méthodes.

Le présent travail porte est composé de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre**, nous présentons les notions utiles, qui sont utilisées dans les autres chapitres. Nous donnons un rappel des espaces (Banach et Hilbert). Puis nous parlons sur les éléments de la théorie des opérateurs, opérateurs intégraux et équations intégrales et les formules de quadrature.

Le deuxième chapitre, sera consacré pour la définition d'un problème direct et problème inverse, problème bien posé et mal-posé et on définit quelques exemples de problèmes mal-posés décrits par des illustrations.

Dans **le troisième chapitre**, On présente brièvement le principe de quelques méthodes de régularisation plus courante : la méthode de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev et la méthode de Landweber.

Notations

$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\ \cdot\ _X$	: Une norme dans l'espace X .
$\mathbb{k}$	: Corps des scalaires ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$Y^\perp$	: L'ensemble orthogonal de l'ensemble Y .
A	: Opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert.
$D(A)$	: Le domaine de définition de l'opérateur A .
$L(X, Y)$	: L'espace des opérateurs linéaires de X dans Y .
$\mathcal{L}(X, Y)$	: L'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .
$\ker(A)$	: Le noyau de l'opérateur A .
$\text{Im}(A)$	: L'image de l'opérateur A .
A^{-1}	: L'inverse de l'opérateur A .
A^*	: L'opérateur adjoint de l'opérateur A .
$\overline{Y}$	: L'adhérence de l'ensemble Y .
$\delta(H)$	: L'ensemble des opérateurs auto-adjoints définis sur l'espace de Hilbert.
I	: L'identité, $id : X \longrightarrow Y$ est continue, telle que : $\ id(x)\ _Y = \ x\ _Y \leq c \ x\ _X$.
φ'	: La dérivée de φ par rapport à x .

Chapitre 1

Rappels et notations

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, définition des espaces (espace de Banach et espace de Hilbert), les théories des opérateurs : la continuité puis l'adjoint, l'auto-adjoint et la compacité, opérateurs intégraux et équations intégrales et les formules de quadratures. Pour plus de détails et pour les démonstrations des théorèmes voir [1], [2], [3], [4], [5]

1.1 Rappel sur les espaces

Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel réel ou complexe normé complet. Par exemple, l'espace vectoriel $\mathbb{K}$ de dimension 1 est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.1 *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace de Banach X . Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est normalement convergente (c'est-à-dire si la suite réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ converge), alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ converge dans X , et*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| .$$

Espace de Hilbert Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 (*produit scalaire*). *Un produit scalaire est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ symétrique et définie positive, c'est-à-dire*

1. Pour tout $(u, v, w) \in H^3$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$,
2. Pour tout $(u, v) \in H^2$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
3. Pour tout $u \in H$, $\langle u, u \rangle \geq 0$,
4. $\langle u, u \rangle = 0$ implique $u = 0$.

On note par $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$, la norme définie sur H associée au produit scalaire.

Définition 1.1.3 On appelle un espace de Hilbert tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée.

Exemple 1.1.1 L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ est un espace de Hilbert.

1.1.1 Propriétés des espaces de Hilbert

Proposition 1.1.2 (Identité de Cauchy-Schwartz) Soit H un espace de Hilbert, pour tout u, v de H , on a

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|_H^2 \|v\|_H^2.$$

Sous-espace fermé

Définition 1.1.4 Un sous-espace Y d'un espace de Hilbert H est fermé si toute suite de vecteurs dans Y convergente dans H , converge vers un vecteur dans Y :

$$\text{Pour tout } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ implique } y \in Y$$

Théorème 1.1.1 (Théorème de projection) Soit Y un sous-espace convexe fermé non-vide dans H . Pour tout f dans H , il existe un élément unique u dans Y , tel que

$$\|f - u\| = \min_{v \in Y} \|f - v\|$$

De plus u la projection de f sur Y , notée par : $u = P_Y(f)$.

Définition 1.1.5 Les deux éléments u, v de H sont dits orthogonaux, et notés

$$u \perp v \text{ si et seulement si } \langle u, v \rangle = 0.$$

Définition 1.1.6 Soit Y un sous-espace de Hilbert H . L'orthogonal $Y^\perp$ de Y défini par : $Y^\perp = \{u \in H, \langle u, v \rangle = 0, \text{ pour tout } v \in Y\}$.

1.2 Opérateurs linéaires

Cette partie concernent les opérateurs linéaires et sons propriétés principaux.

Soit X et Y deux espaces de Hilbert.

1.2.1 opérateurs continus

Définition 1.2.1 Un opérateur linéaire continu A défini dans un espace X dans Y est une application linéaire continue de X dans Y , c'est-à-dire :

- a) Pour tout $u \in X, Au \in Y$,
- b) Pour tout $(u, v) \in X \times X$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$,
- c) Il existe $M > 0$, Pour tout $u \in X, \|Au\|_Y \leq M \|u\|_X$.

Le plus petit nombre M qui vérifie le troisième point ci-dessous s'appelle la norme de l'opérateur A .

Notation 1.2.1 On note par $L(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires de X dans Y .

Définition 1.2.2 Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$, est continu s'il est continu en $0 \in Y$.

Définition 1.2.3 On dit que l'opérateur $A : X \rightarrow Y$, est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$, un ensemble borné dans l'espace Y .

Théorème 1.2.1 *Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$, est borné si et seulement si pour tout $u \in X$, on a :*

$$\| Au \|_Y \leq c \| u \|_X .$$

Théorème 1.2.2 *Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$, est continu si et seulement s'il est borné.*

Notation 1.2.2 *On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .*

Proposition 1.2.1 *Les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire :*

i) Le noyau de A est le sous-espace de X

$$\text{Ker}(A) = \{u \in X, Au = 0\} .$$

ii) L'image de A est le sous-espace de Y

$$\text{Im}(A) = \{v \in Y, \exists u \in X, Au = v\} .$$

Théorème 1.2.3 *Soit X et Y deux espaces de Hilbert, et $A \in L(X, Y)$ est injectif, notons $A^{-1} : \text{Im}(A) \rightarrow X$ l'inverse de A . On a :*

$$\text{Im}(A) \text{ est fermé } \iff A^{-1} \text{ est continu.}$$

Preuve. Pour la preuve voir [1] page 42. ■

1.2.2 Opérateurs adjoints

Théorème 1.2.4 (Théorème de Riesz) *Soit L une forme linéaire continue sur X . Il existe un unique vecteur $x_0 \in X$ tel que :*

$$L(x) = \langle x_0, x \rangle, \text{ pour tout } x \in X.$$

Théorème 1.2.5 *Soit A un opérateur linéaire continu de X dans Y . Il existe un unique opérateur de Y dans X noté A^* , tel que :*

$$\text{Pour tout } u \in X, \text{ et } v \in Y, \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle.$$

Cet opérateur est appelé l'adjoint de A . Il vérifie de plus :

$$(A^*)^* = A \text{ et } \|A^*\| = \|A\|.$$

Preuve. Pour la preuve voir [1] page 129. ■

Proposition 1.2.2 *Soient A et B deux opérateurs linéaires, α et β deux scalaires on a :*

i) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*.$

ii) $(AB)^* = B^*A^*.$

Proposition 1.2.3 *Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire et A^* son adjoint, alors :*

i) $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp.$

ii) $(\text{Ker } A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}.$

1.2.3 Opérateurs auto-adjoints

Définition 1.2.4 *Un opérateur dans X est dit auto-adjoint si et seulement si :*

$$\text{Pour tout } (u, v) \in X \times X, \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

L'ensemble de tous les opérateurs auto-adjoint sur X est noté par $\delta(X)$.

- a) Pour tout $A, B \in \delta(X)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha A + \beta B \in \delta(X)$.
- b) Pour tout $A, B \in \delta(X)$, AB est un opérateur auto-adjoint $\Leftrightarrow AB = BA$.
- c) Si l'opérateur $A \in \delta(X)$, alors on a : $\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle Au, u \rangle|$.

Définition 1.2.5 *Un opérateur $A \in \delta(X)$ est dit positif et noté $A \geq 0$, si*

$$\langle Au, u \rangle \geq 0, \text{ Pour tout } u \in X.$$

1.2.4 Opérateurs compacts

Définition 1.2.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dit que A est un opérateur compact si et seulement si l'image de toute partie bornée de X est relativement compacte dans Y , c'est-à-dire que $B \subset X$ est borné, $\overline{A(B)}$ (l'adhérence de $A(B)$) est compacte dans Y .*

Remarque 1.2.1 *Une partie d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ de dimension finie est compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.*

Proposition 1.2.4 *Soit X, Y, W trois espace de Hilbert.*

- i) Si $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $A_2 \in \mathcal{L}(Y, W)$, alors $A_1 A_2 \in \mathcal{L}(X, W)$ est compact.
- ii) Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact, $A^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ est aussi compact.

iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des opérateurs compacts de X dans Y . Si (A_n) converge vers A dans $\mathcal{L}(X, Y)$ c'est-à-dire si :

$$\|A_n - A\| = \sup \frac{\|A_n u - A u\|_Y}{\|u\|_X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

alors A est compact. En d'autre terme, les opérateurs compacts forment un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Théorème 1.2.6 (Théorème de la décomposition des valeurs singulières) *Soit $A : X \rightarrow Y$, un opérateur linéaire compact, $A^* : Y \rightarrow X$, son opérateur adjoint, et on a les valeurs $|w_1| \geq |w_2| \geq |w_3| \dots \geq 0$. La suite ordonnée des valeurs singulière positive de A est dénombré relativement avec ses multiplicité. Alors il existe des systèmes orthonormal $(\varphi_j) \subset X$ et $f \subset Y$ avec les propriétés suivante :*

$$A u_j = w_j v_j \text{ et } A^* v_j = w_j u_j, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Le système $\{u_j; v_j, w_j\}$ est appelé le système singulier de A et tout $\varphi \in X$ possède la décomposition des valeurs singulière :

$$\forall \varphi \in H, \quad \varphi = \varphi_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle \varphi, u_j \rangle u_j$$

et

$$A \varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_j \langle \varphi, u_j \rangle v_j, \quad \text{où } \varphi_0 \in \ker(A).$$

Proposition 1.2.5 *Soit A un opérateur borné de X dans Y , où X et Y deux espaces de dimension finie. Alors A est un opérateur compact.*

Proposition 1.2.6 *Si X n'est pas de dimension finie, alors l'identité $I : X \rightarrow Y$ n'est jamais compacte.*

Démonstration. Voir [4]. ■

Corollaire 1.2.1 *Soit A un opérateur compact de X dans Y , où X et Y sont deux espaces de Hilbert qui ne sont pas de dimension finie. Alors A n'est jamais inversible dans $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Preuve. Si A est inversible, son inverse A^{-1} vérifie :

$$AA^{-1} = I.$$

Comme A est compact, et que l'identité ne peut l'être d'après la proposition (1.2.6), nous avons une contradiction. ■

Théorème 1.2.7 *L'opérateur linéaire compact $A : X \rightarrow Y$ ne peut avoir un inverse borné sauf si l'espace X est de dimension finie.*

Démonstration. Voir [5] page 28. ■

1.3 Opérateurs intégraux et équations intégrales

1.3.1 Opérateurs intégraux

Définition 1.3.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble compact, $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'opérateur $A : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ défini par :*

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \Omega$$

est appelé opérateur intégral et $k(x, y)$ le noyau de l'opérateur intégral.

Théorème 1.3.1 *Soit $k \in L^2([a, b[\times]c, d])$. L'opérateur intégral A de noyau k est compact de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$.*

Preuve. Voir [1] page 34. ■

1.3.2 Equations intégrales

Définition 1.3.2 *Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue à déterminer $\varphi(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. Une forme typique d'une équation intégrale dans $\varphi(x)$ est de la forme*

$$\Phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in [a, b] \quad (1.3.1)$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont les limites de l'intégration, λ est un paramètre constant, et $k(x, y)$ est une fonction connue de deux variables x et y , appelé le noyau de l'équation intégrale. Les fonctions $f(x)$ et $k(x, y)$ sont données à l'avance. Il est à noter que les limites d'intégration déterminées comme $a(x)$ et $b(x)$ peuvent être toutes les deux variables, constantes ou mixtes.

classification des équations intégrales

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm, qui constituent donc les deux principales catégories. À ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autres types, à savoir les équations intégrales - différentielles et les équations intégrales singulières.

Équations intégrales linéaires de Fredholm La forme standard des équations intégrales linéaires de *Fredholm*, où les limites de l'intégration a et b sont des constantes, est donnée par la forme

$$\Phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy, \quad a \leq x, y \leq b \quad (1.3.2)$$

L'équation (1.3.2) est appelée linéaire parce que la fonction inconnue $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale se produit de manière linéaire, c'est-à-dire que la puissance de $\varphi(x)$ est égale à un.

La valeur de $\Phi(x)$ donnera les types suivants d'équations intégrales linéaires de *Fredholm*:

Si $\Phi(x) = 0$, l'équation (1.3.2) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = 0 \quad (1.3.3)$$

et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle *l'équation intégrale de Fredholm de premier espèce*.

Si $\Phi(x) = 1$, l'équation (1.3.2) s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy. \quad (1.3.4)$$

et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle *l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce*.

Équations intégrales linéaires de Volterra La forme générale des équations intégrales linéaires de *Volterra*, où les limites de l'intégration sont fonction de x plutôt que de constantes, est de la forme

$$\Phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy, \quad a \leq x, y \leq b \quad (1.3.5)$$

où la fonction inconnue $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale se produit linéairement comme indiqué précédemment.

Il convient de noter que (1.3.5) peut être considéré comme un cas particulier de l'équation intégrale de *Fredholm* lorsque le noyau $K(x, y)$ s'annule pour $y > x$. Les équations intégrales de *Volterra* sont de deux espèces, en fonction de la valeur de $\Phi(x)$, à savoir:

- Si $\Phi(x) = 0$, l'équation (1.3.5) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = 0 \quad (1.3.6)$$

et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle *l'équation intégrale de volterra de premier espèce*.

- Si $\Phi(x) = 1$, l'équation (1.3.5) s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.3.7)$$

et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle *l'équation intégrale de volterra de seconde espèce*.

Remarque 1.3.1 En examinant soigneusement les équations (1.3.2) - (1.3.7), nous pouvons conclure les remarques suivantes.

1. 1-La structure des équations de Fredholm et de Volterra :

La fonction inconnue $\varphi(x)$ n'apparaît linéairement que sous le signe de l'intégrale dans les équations intégrales linéaires de *Fredholm* et de *Volterra* de premier espèce. Cependant, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît linéairement à l'intérieur du signe intégral et à l'extérieur du signe intégral également dans le deuxième espèce d'équations intégrales linéaires de *Fredholm* et de *Volterra*.

1. 2-Les limites de l'intégration :

Dans les équations intégrales de *Fredholm*, l'intégrale est prise sur un intervalle fini avec des limites d'intégration définies. Toute fois, dans les équations intégrales de *Volterra*, au moins une limite de la plage d'intégration est une variable et la limite supérieure est la plus couramment utilisée avec une limite variable.

1. 3-La propriété de linéarité :

Comme indiqué précédemment, la fonction inconnue $\varphi(x)$ dans les équations intégrales de *Fredholm* et de *Volterra* (1.3.4) et (1.3.7) apparaît à la première puissance, où qu'elle se trouve. Cependant, des équations intégrales de *Fredholm* et de *Volterra* non linéaires apparaissent si $\varphi(x)$ est remplacé par une fonction non linéaire $F(\varphi(x))$, telle que $\varphi^2(x)$, $\varphi^3(x)$, $e^{\varphi(x)}$, etc.

Exemple 1.3.1 *équations intégrales non linéaires:*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y) \varphi^2(y) dy$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y) \sin(\varphi(y)) dy$$

1. 4-La propriété d'homogénéité :

Si $f(x) = 0$ dans l'équation intégrale de Fredholm ou de Volterra du second espèce donnée par (1.3.4) et (1.3.7), l'équation résultante s'appelle une équation intégrale homogène, sinon elle s'appelle une équation intégrale non homogène.

1. 5-Le comportement singulier de l'équation intégrale :

Une équation intégrale est appelée singulière si l'intégration est impropre. Cela se produit généralement si l'intervalle d'intégration est infini, ou si le noyau devient illimité à un ou plusieurs points de l'intervalle de considération $a \leq y \leq b$.

1.3.3 Discrétisation des équations intégrales par quadrature

Les formules de quadrature consistent à approcher une intégrale :

$$I = \int_a^b \varphi(x) dx$$

par une somme pondérée des valeurs de φ en des points appelés noeuds.

Exemple 1.3.2 (Formule des trapèzes) Les noeuds de la formule des trapèzes sont les points x_i , $i = 1, \dots, n$ et $h = \frac{(b-a)}{n}$. Les poids sont $\omega_i = h$, $i = 2, \dots, n-1$, ainsi que $\omega_1 = \omega_n = \frac{h}{2}$. On approche l'intégrale par la somme des aires des trapèzes déterminés par les valeurs de la fonction aux points x_i et x_{i+1} , ce qui donne :

$$I^T = h \left(\frac{1}{2} \varphi(a) + \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_{n-1}) + \frac{1}{2} \varphi(b) \right).$$

Et l'erreur donnée par cette formule est : $|I - I^T| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \|\varphi''\|_\infty$, $\varphi \in C^2[a, b]$.

Exemple 1.3.3 (Formule de Simpson) On suppose cette fois que n est pair. Les noeuds de la formule de Simpson sont les mêmes que pour la formule des trapèzes. Les poids sont $\omega_{2i} = \frac{2h}{3}$, $i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$, $\omega_{2i+1} = \frac{4h}{3}$, $i = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$, $i = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$, et $\omega_0 = \omega_n = \frac{h}{3}$.

La formule de quadrature de Simpson est :

$$I^S = \frac{h}{3} (\varphi(a) + 4\varphi(x_1) + 2\varphi(x_2) + \dots + 2\varphi(x_{n-2}) + 4\varphi(x_{n-1}) + \varphi(b)).$$

Et l'erreur donnée par Simpson est : $|I - I^S| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \|\varphi^{(4)}\|_\infty$, $\varphi \in C^4[a, b]$.

Chapitre 2

Problèmes mal-posés

2.1 Introduction

La définition des problèmes inverses n'est pas simple. On peut les caractériser de façon stricte par les définitions mathématiques pour chaque problème. Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène.

Pour comprendre et maîtriser un phénomène physique, l'usage veut que nous relions les paramètres φ qui caractérisent le phénomène aux informations mesurables f qui en résultent à partir d'un modèle, que l'on note A . La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal- posés de certains problèmes pratique est reconnu et motive des nombreuses recherches en mathématiques.

2.2 Problèmes directs et problèmes inverses

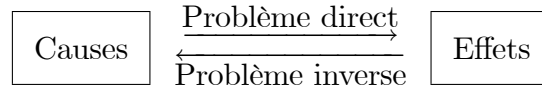
La distinction entre un problème direct et un problème inverse n'est pas facile à d'efinir. On pourrait dire qu'un problème direct consiste à déterminer l'effet à partir de sa cause :

- a) En physique : déterminer la température future à partir de la température initiale et de conductivité thermique.
- b) En finance: calculer les prix des options à partir du prix initial du sous-jacent et de la loi d'évolution

Dans un problème inverse, on cherche à identifier la cause d'un effet observé :

- c) En physique: identifier la conductivité thermique à partir de la température finale.
- d) En finance: identifier la loi d'évolution du sous-jacent à partir des prix d'options.

Les problèmes inverses sont beaucoup plus difficiles à résoudre que les problèmes directs correspondants car ils sont pour la plupart mal-posés.



2.2.1 Problèmes bien-posés et mal-posés

Définition 2.2.1 Soient X, Y deux espaces de Hilbert, et $A : X \rightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème $A\varphi = f$ est bien posé au sens de Hadamard [6]) si :

- i) **Existence** : Pour tout $f \in Y$ il existe $\varphi \in X$ tel que $A\varphi = f$.
- ii) **Unicité** : Pour tout $f \in Y$, il y a au plus une solution $\varphi \in X$.
- iii) **Stabilité** : La solution φ dépend continûment de la donnée f c'est-à-dire pour toute suite $(\varphi_n) \subset X$ avec $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$ ($n \rightarrow \infty$) implique $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ($n \rightarrow \infty$).

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit mal-posé. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Définition 2.2.2 (Problème mal-posé) Soit X et Y deux espaces de Hilbert .

$A : X \rightarrow Y$ opérateur linéaire continu tel que :

$$A\varphi = f,$$

et ce problème peut-être mal-posé pour trois raisons suivantes :

- i) Non existence de solution, $f \notin \text{Im}(A)$.
- ii) Manque d'unicité, A n'est pas inversible $\ker(A) \neq 0$.
- iii) Manque de continuité par rapport aux données, A^{-1} existe mais n'est pas continu.

En dimension fini ($\mathbb{R}^d$) tout opérateur linéaire est continu et tout problème linéaire admettant une unique solution est bien posé.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal-posés.

2.2.2 Exemples de problèmes mal-posés

On présente ici quelques exemples de problèmes mal-posés. Pour plus de détails voir les livres [7], [8], [1], [3]. Pour d'autres exemples bien détaillés, voir les célèbres livres de H. W. Engl M.Hanke et A. Neubauer [12] et A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin [13] et V. Sohn [14].

Système linéaire

Soit le système linéaire $A\varphi = f$ avec $A \in L(X, Y)$, X, Y deux espaces de Hilbert.

Le problème du calcul $\varphi \in \mathbb{R}^n$ à partir de $f \in \mathbb{R}^m$, en résolvant l'équation

$$A\varphi = f.$$

Si A est compact et $\text{Im}(A)$ non fermé, alors le problème est mal posé.

$\text{Im}(A)$ est non fermé $\implies A^{-1}$ est non borné $\implies$ la troisième condition n'est donc pas vérifiée d'après le théorème (1.2.3), le problème reste mal posé.

Le système mal-conditionné

On souhaite de résoudre le système linéaire $A\varphi = f$, où A est une matrice, on résoud le système on obtient $\varphi_e - \varphi_\delta = A^{-1}(f_e - f_\delta)$, et on a par $\|f_e\| = \|A\varphi_e\| \leq \|A\| \|\varphi_e\|$ implique $\frac{1}{\|\varphi_e\|} \leq \frac{\|A\|}{\|f_e\|}$. On calcule l'erreur relatif :

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\varphi_e - \varphi_\delta\|}{\|\varphi_e\|} &= \frac{\|A^{-1}(f_e - f_\delta)\|}{\|\varphi_e\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|f_e - f_\delta\|}{\|\varphi_e\|} \\
 &\leq \|A^{-1}\| \frac{\|f_e - f_\delta\|}{\|f_e\|} \|A\| \\
 &\leq \underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{\text{cond}(A)} \frac{\|f_e - f_\delta\|}{\|f_e\|}.
 \end{aligned}$$

On peut voir que le nombre de condition est large contrairement à le changement relatif est plus petit (problème instable), $\text{cond}(A)$ mesure que A est une matrice singulière. Ce système est mal-conditionné donc il est problème mal-posé pour plus de détails voir [8].

Exemple 2.2.1 *Considérons le système suivant $A\varphi = f$*

$$\begin{pmatrix} 4,218613 & 6,327917 \\ 3,141592 & 4,712390 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,54530 \\ 7,85982 \end{pmatrix},$$

la solution est

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si on fait une petite perturbation sur A comme suit :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4,218611 & 6,327917 \\ 3,145944 & 4,712390 \end{pmatrix},$$

la solution est

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Autrement dit, de très petites variations sur A , ont conduit à de grandes variations sur φ . Remarquons q'une erreur relative d'ordre 4 sur la solution, et $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = 5519263 \gg 1$.

Exemple 2.2.2 *Considérons le système suivant $A\varphi = f$*

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 12 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 23 \\ 27 \end{pmatrix},$$

qui admet comme solution

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le problème suivant dans le quel le vecteur f est légèrement perturbé

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 12 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44, 44 \\ 22, 77 \\ 26, 73 \end{pmatrix}.$$

La solution du système perturbé est

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 6, 23 \\ 4, 73 \\ 4, 69 \end{pmatrix},$$

On a de très petites variations sur f , ont conduit à de grandes variations sur φ . Remarquons qu'une erreur relative d'ordre 5 sur la solution, et $\text{cond}(A) = 745,0510 \succ$.

Les problèmes de Cauchy pour l'équation de Laplace

On considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $f(x) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$. La solution unique de ce problème est :

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny), x \in \mathbb{R}, y \geq 0.$$

On a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |f(x)| + |g(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \right\},$$

mais

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny).$$

Pour tout $y > 0$, l'erreur dans les données tend vers 0, contrairement à l'erreur de la solution u tend vers l'infini. Donc, la solution ne dépend pas continuellement avec les données (instables) et le problème mal-posé pour plus de détails voir [7].

La différentiabilité

Le problème direct est de trouver l'antidérivée f avec $f(0) = 0$, avec une donnée de la fonction continue φ dans l'intervalle $[0, 1]$, tel qu'il calcule

$$f(x) = \int_a^x \varphi(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Dans le problème inverse, Nous donnons la fonction différentiable f dans $[0, 1]$ avec $f(0) = 0$ et déterminons $\varphi = f'$. c'est-à-dire nous résoudons l'équation intégrale $A\varphi = f$, tel que $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est défini par :

$$(A\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(y) dy, \quad x \in [0, 1] \quad \text{pour } \varphi \in C[0, 1].$$

La solution de A est la dérivée $\varphi = f'$, avec $f(0) = 0$ et f est continue et différentiable si φ est la solution exacte de $A\varphi = f$, et si on fait une perturbation sur f , et l'appelle par $\tilde{f}$ n'est pas différentiable, et si φ est la solution de problème perturbé n'est pas nécessairement fermée dans la solution exacte.

Exemple 2.2.3 Soit $X = Y = L^2([-1, 1])$ et A l'opérateur d'intégration

$$Af(x) = \int_{-1}^x f(y) dy, \quad A^{-1} = \frac{d}{dy}.$$

On montre facilement que l'opérateur A est borné et donc continu. Cependant, si on pose $f_n = \sqrt{n}(1 - n|x|)_{|x| \leq \frac{1}{n}}$, $\|f_n\|^2 = \frac{2}{3}$ mais $\|A^{-1}f_n\|^2 = 2n^2$. Donc, A^{-1} n'est pas borné, ce qui implique que la différentiation est un problème mal posé voir [3].

Exemple 2.2.4 Soit $f_e(x) = 0$ et $f_\delta(x) = \delta \sin(\frac{x}{\delta^2})$, on calcule la norme infinie de f_e et f_δ , on obtient

$$\|f_e - f_\delta\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |0 - \delta \sin(\frac{x}{\delta^2})| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\delta| |\sin(\frac{x}{\delta^2})| = \delta.$$

$$\text{implique } \|f_e - f_\delta\|_\infty \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0.$$

On a les dérivées de f sont $f'_e = 0$ et $f'_\delta = \frac{1}{\delta} \cos(\frac{x}{\delta^2})$. Si on calcule la norme infinie de f'_e et f'_δ on obtient

$$\|f'_e - f'_\delta\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |0 - \frac{1}{\delta} \cos(\frac{x}{\delta^2})| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\frac{1}{\delta}| |\cos(\frac{x}{\delta^2})| = \frac{1}{\delta}.$$

$$\text{implique } \|f'_e - f'_\delta\|_\infty \rightarrow \infty \text{ si } \delta \rightarrow 0.$$

C'est-à-dire-que la différentiabilité est instable autrement dit cette dernière est un problème mal-posé voir [7].

Le problème elliptique en dimension 1

On considère le problème elliptique :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \quad x \in]-1, 1[, \quad (2.2.1)$$

nous prendrons :

$$a(x) = x^2 + 1, \text{ et la solution } u(x) = (1 - x^2)/2,$$

ce qui donne :

$$f(x) = 3x^2 + 1.$$

Nous chercherons à retrouver le coefficient $a(x)$ à partir d'une mesure de u . En intégrant l'équation (2.2.1), entre 0 et x et en divisant par u' .

On a :

$$-(a(x)u')' = f(x) = 3x^2 + 1$$

implique que :

$$a(x) = \frac{C}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad (2.2.2)$$

ce qui donne dans notre cas particulier ($u'(x) = -x$) :

$$a(x) = \frac{C}{x} + x^2 + 1, \quad \text{pour } x \neq 0, C = cte \quad (2.2.3)$$

Si $C \neq 0$, alors $a(x) \neq x^2 + 1$.

Nous voyons que, même dans ce cas particulier, $a(x)$ n'est pas déterminée par les données u , Bien entendu dans ce cas, il est clair que la bonne solution correspond à $C = 0$.

Ce problème est instable puisque l'équation (2.2.2) fait intervenir $u'(x)$, et nous venons de voir que le passage de u à u' est un problème instable. Et aussi la division par $u'(x)$, si $u'(x)$ s'annule, la division est impossible. Si $u'(x)$ est simplement petit la division sera cause d'instabilité pour plus de détails voir [1].

Les équations intégrales de première espèce de Fredholm et Volterra

Les équations de première espèce, aux quelles nous concentrerons notre attention, conduisent à des problèmes mal posés. En revanche, celles de seconde espèce ont, en général, une solution unique (cela relève de l'alternative de Fredholm)

Si $A\varphi = \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy$ ou $Vu = \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy$ et $k(x, y)$ est un noyau continu sur $D = [a, b] \times [a, b]$, alors les opérateurs A et V sont compacts sur $H = L^2[a, b]$. Ces opérateurs n'admettent pas d'inverses bornés sur H , donc $Au = f$ et $Vu = f$, sont mal-posés.

L'équation intégrale de Fredholm de première espèce

soit l'équations intégrale de Fredholm de première espèce :

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy. \quad (2.2.4)$$

avec $k(x, y) \in L^2([c, d] \times [a, b])$, L'équation (2.2.4) n'a pas toujours de solution. En effet supposons $k(x, y)$ continûment dérivable par rapport à x sur $[c, d]$, alors le premier membre de (2.2.4) est continûment dérivable par rapport à x pour toute $\varphi \in L^2([a, b])$ en raison de théorème de dérivation sous le signe intégral [9]. Par suite la formule (2.2.4) n'a aucune solution si le second membre f n'est pas dérivable sur $[c, d]$ alors $A\varphi = f$ un problème mal-posé.

Exemple 2.2.5 soit : $\varphi(y) = \sin(ny), n \in [1, 2, 3... + \infty[$, pour un second membre $g(x)$ l'équation (2.2.4) devient alors :

$$g(x) = \int_a^b k(x, y) \sin(ny) dy, \quad n \in [1, 2, 3... + \infty[,$$

et d'après le lemme de Riemann-Lebesgue [10]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = O\left(\frac{1}{n}\right) \approx 0.$$

Les perturbations hautes fréquences de φ (c'est-à-dire $\sin(ny)$ quand n est grand) seront indétectables. Par conséquent lors de l'opération inverse pour déterminer φ à partir de g , on s'attend à ce que les composantes de hautes fréquences de g soient amplifiées.

Exemple 2.2.6 L'équation intégrale : $\int_0^1 e^{ty} \varphi(y) dy = f(t) = (e^{t+1} - 1)/(t + 1), 0 < t < 1$

est uniquement résoluble par $\varphi = \exp(t)$. Nous approchons l'intégrale par la méthode des trapèzes

$$\int_0^1 e^{ty} \varphi(y) dy = h \left(\frac{1}{2} \varphi(0) + \frac{1}{2} e^t \varphi(1) + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jht} \varphi(jh) \right)$$

avec $h = \frac{1}{n}$. Pour $t = ih$, on obtient le système linéaire

$$h \left(\frac{1}{2} \varphi_0 + \frac{1}{2} e^{ih} \varphi_n + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jih^2} \varphi_j \right) = f(ih), \quad i = 0, \dots, n$$

Alors φ_i devrait être une approximation de $\varphi(ih)$. Le tableau ci-dessous présente l'erreur entre la solution exacte $\varphi(t)$ et la solution approchée φ_i pour $t = 0,025 \quad 0,5 \quad 0,75 \quad 1, t = ih$.

t	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0	0,44	-3,08	1,08	-38,21
0,25	-0,67	-38,16	-25,17	50,91
0,5	0,95	-75,44	31,24	-116,45
0,75	-1,02	-22,15	20,03	103,45
1	1,09	-0,16	-4,23	-126,87

On voit que les approximations ont rien à voir avec la solution exacte et devenir encore pire pour les schémas de discrétisation plus fines voir [7].

L'équation de la Chaleur retrogradée

Soit l'équation retrograde de Chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ u(x, 0) = u_0(x) = \frac{1}{n} \sin(nx). \end{cases}$$

d'où la solution

$$u(x, t) = \frac{1}{n} e^{n^2 t} \sin(nx).$$

On a

$$\|u_0(x)\| = \left\| \frac{1}{n} \sin(nx) \right\| = \left\| \frac{1}{n} \right\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

et

$$\|u(x, t)\| = \left\| \frac{1}{n} e^{n^2 t} \sin(nx) \right\| \rightarrow \infty \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Ce problème est mal-posé. En d'autres termes, trouver la propagation de température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème bien posé. Cependant, trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal-posé.

Chapitre 3

Méthodes de régularisation

On aborde dans ce chapitre le principe de quelques méthodes de régularisation qui sont les plus courantes : la méthode de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev et on termine par la méthode de Landweber. Pour une lecture plus approfondie on propose de voir respectivement les livres [16];[17], [18];[19], [7]. Pour les méthodes de régularisation des problèmes mal-posés non-linéaires voir [20].

Régulariser un problème mal-posé, c'est le remplacer par un autre, bien-posé. De sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité.

Notion d'opérateur régularisant

Un opérateur $R(f, \alpha)$ est appelé opérateur régularisant pour l'équation $A\varphi = f$ dans le voisinage de $f = f_{ex}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $R(f, \alpha)$ soit défini sur $\{\alpha > 0\} \times \{f \in Y, \| f - f_{ex} \| < \delta_1\}$,
- 2) Il existe une fonction $\alpha(\delta)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \delta_1]$ telle que :

$\| f_{ex} - f_\delta \| < \delta \Rightarrow \| \varphi_{ex} - \varphi_\delta \| < \varepsilon$, avec $\varphi_\delta = R(f_\delta, \alpha(\delta))$. Voir [15].

3.1 Méthode de Tikhonov

On parle tout d'abord de la méthode de moindres carrés, qui détermine l'existence de la solution.

Méthode de moindres carrées

Lorsque $f \notin \text{Im}(A)$, en dimension fini, l'existence peut toujours être obtenue en passant la formulation au sens de moindres carrées, pour les démonstrations voir [1] page 42 – 44.

Etant donné $f \in Y$ nous cherchons $\varphi \in X$ solution de :

$$A\varphi = f. \quad (3.1.1)$$

Nous proposons une formulation comme un problème de moindres carrées : nous remplaçons donc (3.1.1) par :

$$\min_{\varphi \in X} \frac{1}{2} \{ \| A\varphi - f \|_Y^2 \} \quad (3.1.2)$$

Théorème 3.1.1 *Soit $A \in L(X, Y)$, X, Y deux espaces de Hilbert, $f \in Y$. Un élément $\varphi \in X$ est une solution de (3.1.2) si et seulement si*

$$A^* A\varphi = A^* f. \quad (3.1.3)$$

Remarque 3.1.1 *L'équation normale (3.1.3) est dite équation normale et on peut la réécrire*

$$A^*(A\varphi - f) = 0$$

ce qui exprime simplement que le résidu $f - A\varphi$ est dans le noyau de A^* , c'est-à-dire orthogonal à l'image de A .

Lemme 3.1.1 *La solution du problème (3.1.2) est unique si et seulement si l'opérateur A est injectif.*

Proposition 3.1.1 *L'équation (3.1.3) admet une solution si et seulement si :*

$$f \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A)^\perp.$$

Si $f \in \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(A)^\perp$, le problème (3.1.2) admet une unique solution de norme minimale

$$A^{-1}f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w_j} \langle f, v_j \rangle u_j.$$

Démonstration. Soit le système singulière $\{u_j, v_j; w_j\}$ pour l'opérateur compact A , $\{u_j\}$ est une base orthonormale complète dans $(\ker A^\perp)$, $\{u_j\}$ est une base orthonormale complète dans $\overline{\text{Im}(A)}$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j = 0$ tel que : $Au_j = w_j v_j$, d'après le théorème (1.2.6) : ■

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi, u_j \rangle u_j = \varphi_j u_j \text{ avec } \varphi_j = \langle \varphi, u_j \rangle, \forall j \in \mathbb{N}. \\ A\varphi &= A \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi, u_j \rangle u_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi, u_j \rangle Au_j \quad (\text{car } A \text{ est compact} \Rightarrow A \text{ est continue}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi, u_j \rangle w_j v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j w_j v_j = f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, v_j \rangle v_j \end{aligned}$$

$$\text{implique que } \langle \varphi, u_j \rangle w_j = \langle f, v_j \rangle$$

$$\text{alors } \langle \varphi, u_j \rangle = \frac{\langle f, v_j \rangle}{w_j}$$

$$\text{finalement } \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle f, v_j \rangle}{w_j} u_j$$

est la solution de moindres carrées de norme minimale.

Méthode de Tikhonov

La régularisation de Tikhonov [16], [17] est une méthode très générale pour la régularisation de problèmes inverses mal-posés linéaires et non-linéaires dans les espaces de Hilbert et Banach, ici on parle de cas linéaire.

Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné, X et Y sont des espaces de Hilbert. La méthode de Tikhonov consiste à résoudre le système linéaire suivant

$$A\varphi = f. \tag{3.1.4}$$

On minimise $\|A\varphi - f\|_Y$, $\varphi \in X$, $f \in Y$. La solution générale $\varphi = A^{-1}f$, de (3.1.4) est une solution de moindres carrées et alors elle satisfait l'équation normale

$$A^*A\varphi = A^*f, \quad (3.1.5)$$

où A^* est l'adjoint de A , l'opérateur compact auto-adjoint A^*A a des valeurs propres non négatives et donc, pour toute fixe $\alpha > 0$; l'opérateur $(A^*A + \alpha I)$ tel que I l'opérateur identité dans X a des valeurs propres strictement positives. En particulier, l'opérateur $(A^*A + \alpha I)$ a un inverse borné (continu), donc ce problème de résolution de l'équation :

$$(A^*A + \alpha I)\varphi_\alpha = A^*f, \quad (3.1.6)$$

est bien-posé. L'équation (3.1.6) est définit la forme régulariser de l'équation (3.1.5), et

$$\varphi_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*f, \quad (3.1.7)$$

l'unique solution qui définit l'approximation de Tikhonov vers $A^{-1}f$, la norme minimale de la solution de l'équation (3.1.5) est définit le paramètre de cette régularisation.

Soit le système singulière $\{u_j, v_j; w_j\}$ pour l'opérateur compact A , $\{u_j\}$ est une base orthonormale complète dans $(\ker A)^\perp$, $\{u_j\}$ est une base orthonormale complète dans $\overline{\text{Im}(A)}$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j = 0$ tel que : $Au_j = w_j v_j$ et $A^*v_j = w_j u_j$, et d'après le théorème (1.2.6) :

D'après la forme (3.1.6) : $\alpha\varphi_\alpha = A^*f - A^*A\varphi_\alpha$ implique que $\varphi_\alpha \in \text{Im}(A^*) \subseteq \ker(A)^\perp$ et donc on peut écrire φ_α en terme des valeurs singulières

$$\varphi_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j, \quad (3.1.8)$$

de même façon

$$\begin{aligned} A^*f &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle A^*f, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, Au_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j \langle f, v_j \rangle u_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et} \quad A^* A \varphi_\alpha + \alpha \varphi_\alpha &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle A^* A \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle A \varphi_\alpha, A u_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j \langle A \varphi_\alpha, v_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j \langle \varphi_\alpha, A^* v_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j
 \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}
 A^* A \varphi_\alpha + \alpha \varphi_\alpha &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j^2 \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} (w_j^2 + \alpha) \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j.
 \end{aligned}$$

Nous remplaçons ces résultats dans (3.1.6), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} (w_j^2 + \alpha) \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle u_j &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j \langle f, v_j \rangle u_j \\
 \text{alors} \quad \langle \varphi_\alpha, u_j \rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{w_j^2 + \alpha} \langle f, v_j \rangle \\
 \text{et donc} \quad \varphi_\alpha &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{w_j^2 + \alpha} \langle f, v_j \rangle u_j
 \end{aligned}$$

La solution de moindres carrées de norme minimale est donnée par :

$$A^{-1} f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w_j} \langle f, v_j \rangle u_j,$$

alors si on calcule la norme $\| \varphi_\alpha - A^{-1} f \|$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \| \varphi_\alpha - A^{-1} f \|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{w_j}{w_j^2 + \alpha} \langle f, v_j \rangle u_j - \frac{1}{w_j} \langle f, v_j \rangle u_j \right|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{w_j (w_j^2 + \alpha)} \right)^2 | \langle f, v_j \rangle |^2.
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$\begin{aligned} \text{Maintenant lorsque} \quad & \left(\frac{\alpha}{w_j (w_j^2 + \alpha)} \right)^2 | \langle f, v_j \rangle |^2 \leq \frac{1}{w_j^2} | \langle f, v_j \rangle |^2 \\ \text{et} \quad & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w_j^2} | \langle f, v_j \rangle |^2 = \| A^{-1} f \|^2 < \infty. \end{aligned}$$

On passe à la limite de (3.1.9) tel que $\alpha \rightarrow 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \| \varphi_{\alpha} - A^{-1} f \|^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{w_j (w_j^2 + \alpha)} \right)^2 | \langle f, v_j \rangle |^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{w_j (w_j^2 + \alpha)} \right)^2 | \langle f, v_j \rangle |^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors les vecteurs $\{\varphi_{\alpha}\}$ sont des mielleurs approximations vers $A^{-1}f$, et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_{\alpha} = A^{-1}f.$$

D'ailleurs, pour toute $\alpha > 0$, l'opérateur $(A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$ est borné et par conséquent l'approximation de Tikhonov φ_{α} dépend continument de f .

3.2 Méthode de Lavrentiev

Soit A un opérateur linéaire compact sur un espace de Banach X . Une équation linéaire de la forme

$$A\varphi = f, \quad A \in C^{m \times n}, \quad \varphi, f \in C^n, \quad (3.2.1)$$

sera appelée équation de première espèce. L'inconnue φ est recherchée dans un espace de Banach X . f est un élément connu d'un espace de Banach Y . Les espaces X et Y sont tous deux réels ou tous deux complexes. L'ensemble de définition $D(A)$ de A se confond avec X tout entier. L'ensemble des valeurs $\text{Im}(A)$ de l'opérateur A est en général non fermé.

Supposons que $\ker(A) = \{0\}$, si X est de dimension infinie, l'opérateur A admet un inverse A^{-1} sur $\text{Im}(A)$ qui n'est pas borné. Cette circonstance, fait que le problème défini par $A\varphi = f$ devienne instable.

La méthode de Lavrentiev consiste à réduire l'équation $A\varphi = f$ à une équation de deuxième espèce ($\varphi - A\varphi = f$). Voici un problème qui illustre clairement, l'idée de la régularisation.

Soient $\hat{A}$ et $\hat{f}$ des approximation de A et de f respectivement.

Considérons l'équation approchée

$$\hat{A}\varphi = \hat{f}. \quad (3.2.2)$$

Si par exemple, $\hat{A} = A$ et $\hat{f} \notin \text{Im}(A)$, l'équation $\hat{A}\varphi = \hat{f}$ n'a pas de solution. Même si elle a une solution $\hat{\varphi}$, nous n'avons aucune raison de croire que $\hat{\varphi} \rightarrow \varphi$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, où φ est la solution de $A\varphi = f$. Proposons-nous de régulariser cette équation.

A cet effet, introduisons une équation auxiliaire de deuxième espèce.

La régularisation de Lavrentiev [18], [19] est une régularisation populaire tel que on la utilise si A est une matrice hermetienne positive semi définie, cette méthode replace (3.2.2) par le système d'équations :

$$(\hat{A} + \alpha I)\varphi_\alpha = \hat{f}, \quad (3.2.3)$$

$$\text{implique } \varphi_\alpha = (\hat{A} + \alpha I)^{-1}\hat{f}, \quad \alpha > 0$$

en choisissant le paramètre de régularisation en fonction de ε de telle sorte que φ_α tende vers φ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela est possible, en se donnant quelques restrictions supplémentaires.

Théorème 3.2.1 *Supposons que l'opérateur A vérifie pour tout $\alpha > 0$ la condition*

$$\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \frac{C}{\alpha}, \quad C \text{ est une constante.} \quad (3.2.4)$$

Supposons aussi que $f \in D(A^{-2})$. Si le paramètre de régularisation $\alpha > 0$, est choisi en fonction de ε de telle sorte que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ et $\varepsilon\alpha^{-2} \rightarrow 0$, alors : $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Et si : $\alpha = 0(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$ alors : $\|\varphi_\alpha - \varphi\| = 0(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$.

3.3 Méthode de Landweber

Les méthodes itératives sont des méthodes consistent à construire une suite de solutions approchées convergent vers la solution désirée. Dans les problèmes inverses la suite construite par la méthode itérative ne converge pas, en général, vers une solution du problème de départ. Il est, encore une fois, nécessaire de régulariser le processus itératif, et c'est l'indice d'itération lui-même qui joue le rôle de paramètre de régularisation. En d'autres termes, il convient d'arrêter les itérations plus tôt qu'on ne le ferait dans un cas non bruité.

Parmis ces méthodes itératives, on parle ici de la méthode linéaire de Landweber [7].

Soit l'équation

$$A\varphi = f. \quad (3.3.1)$$

La formule (3.3.1) réécrit sous la forme

$$\varphi = (I - \alpha A^* A)\varphi + \alpha A^* f,$$

pour $\alpha > 0$. Le schéma itérative de cette équation est le suivant :

$$\varphi^0 = 0 \text{ et } \varphi^m = (I - \alpha A^* A)\varphi^{m-1} + \alpha A^* f, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3.2)$$

Lemme 3.3.1 *Soit la suite φ^m définie par la formule (3.3.2) et on définit la fonction $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(\varphi) = \frac{1}{2} \|A\varphi - f\|^2$, $\varphi \in X$. Alors ψ est différentiable au sens de Fréchet pour tout $z \in X$ et*

$$\psi'(z)\varphi = \operatorname{Re}\langle Az - f, A\varphi \rangle = \operatorname{Re}\langle A^*(Az - f), \varphi \rangle, \quad \varphi \in X. \quad (3.3.3)$$

La fonction linéaire $\psi'(z)$ peut être identifiée avec $A^*(Az - f) \in X$ sur l'espace de Hilbert X .

C'est facile de voir la forme explicite $\varphi^m = R_m y$, où l'opérateur $R_m y : Y \rightarrow X$ est défini par la forme suivante

$$R_m = \alpha \sum_{k=0}^{m-1} \langle I - \alpha A^* A \rangle^k A^*, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3.4)$$

Démonstration. Pour la démonstration voir [7] page 41 – 42. ■

Théorème 3.3.1

- a) Soit $A : X \rightarrow Y$, un opérateur compact et soit $0 < \alpha < \frac{1}{\|A\|^2}$. On définit les opérateurs linéaires bornés $R_m : Y \rightarrow X$ par (3.3.4). Ces opérateurs définissent une stratégie de régularisation de paramètre $\alpha = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ et $\|R_m\| \leq \sqrt{\alpha m}$. La suite $\varphi^{m,\delta} = R_m y^\delta$ est calculée par les itérations suivantes :

$$\varphi^{0,\delta} = 0 \text{ et } \varphi^{m,\delta} = (I - \alpha A^* A) \varphi^{m-1,\delta} + \alpha A^* f^\delta,$$

pour $m = 1, 2, \dots$ toute stratégie $m(\delta) \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0$) avec

$$\delta^2 m(\delta) \rightarrow \infty \text{ ($\delta \rightarrow 0$) est admissible.}$$

- b) Soit $\varphi = A^* z \in \text{Im}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \frac{E}{\delta} \leq m(\delta) \leq c_2 \frac{E}{\delta}$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|\varphi^{m,\delta} - x\| \leq c_3 \sqrt{\delta E},$$

pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et a . Alors l'itération de Landweber est optimale pour

$$\|(A^*)^{-1} \varphi\| \leq E.$$

- c) Maintenant, soit $\varphi = A^* A z \in \text{Im}(A^* A)$, $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 (\frac{E}{\delta})^{\frac{2}{3}} \leq m(\delta) \leq c_2 (\frac{E}{\delta})^{\frac{2}{3}}$, on a :

$$\|\varphi^{m,\delta} - \varphi\| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}},$$

pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et a . Pour cela, l'itération de Landweber est aussi optimale pour

$$\|(A^* A)^{-1} \varphi\| \leq E.$$

Démonstration. Pour la démonstration voir [7] page 42 – 43. ■

Conclusion

Au cours de notre étude des problèmes mal-posés. Nous avons défini la notion plus précise d'un problème mal-posé, qui doit satisfaire d'après J.Hadamard à trois propriétés : non existence ou non unicité de la solution, l'absence de stabilité de la solution. On conclut quelques archétype des exemples qui démontrent la cause de la mal-pose des ces exemples. La résolution de ces problèmes mal-posés est la régularisation qui permutent ces derniers problèmes en des autre bien-posés par des méthodes.

Dans la régularisation de Tikhonov, nous approximons la solution de norme minimale de moindres carrés $A^{-1}f$ qui dépend de façon discontinue de f par un vecteur φ_α (α le paramètre de régularisation) tel que φ_α est une fonction continue de f c'est à dire un problème mal-posé est approximé par une famille des problèmes bien-posés.

La méthode de Lavrentiev introduit une équation auxiliaire de deuxième espèce et que A est une matrice hermetienne positive semi définie, et reste de choisir le paramètre de régularisation en fonction de ε avec ($\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow$ et $\varepsilon\alpha^{-2} \rightarrow 0$) qui mene à la convergence.

Pour la méthode de Landweber, on observe qu'une haute précision demande un nombre large m d'itérations mais la stabilité nous force à garder m le plus petit possible.

Bibliographie

- [1] MICHEL KERN. *Problème inverses*, INRIA,ROCQUEN COURT, BP 105, 78153 Le CHESNAY, (2002 – 2003).
- [2] FRÉDÉRIC PAULIN, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Cours de troisième année de Licence, Ecole Normale supérieure, (2008 – 2009).pp. 177 – 178.
- [3] PETER TANKOV, *Calibration de modèles et couverture de produits dérivés*, Université Paris-Diderot (Paris VII), (2012). pp. 97 – 100.
- [4] M.NADIR, *Cours d'analyse fonctionnelle*, University de M'sila (2004).
- [5] RAINER KRESS, *Linear Integral Equations*, Vol. 82,of applied mathematical sciences. Springer, (1989). pp. 9, 26.
- [6] J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, (1923).
- [7] A. KIRSCH. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, (Applied mathematical sciences ; V.120). Springer, New-York. (1996).
- [8] J.RAPPAZ , M.PICASSO, *Introduction à l'analyse numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes (1998). pp. 60.
- [9] GIL PAGÈS, MARC BRIANE, *Analyse - théorie de l'intégration : convolution et transformation de Fourier*.
- [10] D. SRISHTI, CHATTERJI, *Equation différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*.

- [11] Mémoire de Melle Ahmim Yaminav, Une méthode de résolution numérique des problèmes inverses linéaires, 15/Juin/2014, page 12, 35.
- [12] H. W. ENGL, M. HANKE, AND A. NEUBAUER, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer, Dordrecht, (1996).
- [13] J. VON. NEUMANN, R. RICHMYER, *A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks*, J.Appl, Phys., vol. 21, (1950).
- [14] VIEWEG, SOHN, *Stable solution of inverse problems*, Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig (1987).
- [15] MEHDI DANECH-PAJOUH, *Problème mal-posés un exemple d'application à la prévision à court-terme*, Institut national de recherche sur les transports et leur sécurité, (1998).pp. 7.
- [16] H.W.ENGL, *Regularization methods for the stable solution of inverse problems*, Surveys Math.Indust, 3 : 71 – 143, (1993).
- [17] C.W.GROTSCH, *Inverses problems in the Mathématique sciences-Vieng*, Weisbaden, (1993).
- [18] A.I.ELMAHDY, *On the method of Lavrentiev regularization and majorizing sequence for solving ill-posed problems with monotone operators*, Applied mathematical science vol. 9, (2015), no. 24, 1159 – 1174.
- [19] SILVIA NOSCHESE, *Lavrentiev-type regularization methods for Hermitian problems*, Sapienza University of Rome, (2014).
- [20] BARBARA KALTENBACHER AND ANDREAS NEUBAUER AND OTMAR SCHERZER, *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems*, Walter de Gruyter · Berlin · New York, (2008).

ملخص:

في هذا العمل سنهتم بدراسة المواضيع سيئة الطرح. حيث قمنا بإعطاء تعريف وأمثلة نموذجية تجسد هذا الأخير. المنهجية الكلاسيكية لحل هذا المشكل هي الانتظام والدقة. حيث قمنا بدراسة الطرق التالية : منهجية تيكونوف ومنهجية لافروننتياف وأيضا منهجية لاندويبر.

كلمات مفتاحية:

مشكل معكوس. مشكل سيء الطرح. جملة سيئة الشروط. معادلة تكاملية من الدرجة الأولى. منهجية تيكونوف. منهجية لافروننتياف. منهجية لاندويبر.

Résumé :

Dans ce travail on s'intéresse par les problèmes inverses mal-posés. On a donné la définition, des exemples plus typique de problèmes mal-posé. La méthodologie classique pour la résolution de ce type de problèmes est la régularisation. On a donné le principe des méthodes de régularisation plus courante : la méthode de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev et la méthode de Landweber.

Mots-clés:

Problème inverse, Problème mal-posé, Système mal-conditionné, Equation intégrale de première espèce, Méthode de Tikhonov, Méthode de Lavrentiev, Méthode de Landweber.

Abstract:

In this work we will interest by the ill-posed inverse problems. We have given the definition, the more ideal examples of the ill-posed problems. The classical method for solving such problems is the regularization. We have given the principle of the more current methods : method of Tikhonov, method of Lavrentiev and method of Landweber.

Keywords:

Inverse problem, Ill-posed problem, Ill-conditioned problem, Integral equation of the first kind, Method of Tikhonov, Method of Lavrentiev, Method of Landweber.